Министерство образования Российской Федерации
Казанская Государственная Архитектурно-строительная Академия

Кафедра высшей математики

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Линейная алгебра и аналитическая геометрии

I семестр

Казань
2001

Составитель: Л.А. Онегов
УДК 512.8

Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Занятие 1. Определители 2-го и 3-го порядка. Формула Крамера.

Аудиторное задание:

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) 18; 2) 0; 3) 0; 4) 0.

2. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

Ответы: 1) x=12; 2) x_1=–1, x_2=–4; 3) Нет решения; 4) $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2} n$.

3. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$, 2) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$.

Ответы: 1) $x \in (3;\infty)$; 2) $x \in (-\infty;-3)$.

4. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-5y=13 \\ 2x+7y=81 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 4x-6y=5 \end{cases}$

Ответы: 1) x=16, y=7; 2) Система не имеет решений.

5. Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 3x-ay=1 \\ 6x+4y=b \end{cases}$$

1) имеет единственное решение;
2) не имеет решений;
3) имеет бесконечное множество решений.

Ответы: 1) $a \neq 2$; 2) $a = -2$, $b \neq 2$; 3) $a = -2$, $b = 2$.

6. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) –12; 2) 87; 3) –29.

7. Не раскрывая определителя, доказать справедливость равенства:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислить определители, раскрывая их по элементам строки (столбца):

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) –4; 2) 0.

9. Решить уравнение:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: x=-3.

10. Решить неравенство:

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$.

Ответ: $x \in (\frac{7}{2}; \infty)$.

Домашнее задание:

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; 3) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

3. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

4. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} -4x+3y=1 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-\sqrt{3}y=1 \\ \sqrt{3}x-3y=\sqrt{3} \end{cases}$

5. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

6. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Решить неравенство:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

Ответы к домашнему заданию:

1. 1) 10; 2) –50; 3) $x_2 - x_1$; 4) 1.
2. 1) $x = 2$; 2) $x_1 = -\frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{3}{2}$; 3) $x = 2$; 4) $x = \frac{\pi(2n+1)}{6}$.
3. 1) $x \in (-10;\infty)$; 2) $x \in (-1;7)$.
4. 1) $x = 2$, $y = 3$; 2) $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$, x - любое действительное число.
5. 1) 29; 2) 0; 3) $2a^3$.
6. $x_1 = -10$, $x_2 = 2$.
7. $x \in (-6;-4)$.

Занятие 2. Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

Аудиторное задание:

1. Найти:

1) $Z_1 \pm Z_2$; 2) Z_1Z_2; 3) Z_1^2; 4) $\frac{z_1}{z_2}$, если $Z_1 = -3 + i$, $Z_2 = 6 - 5i$.

Ответы: 1) $3 - 4i$, $-9 + 6i$; 2) $-13 + 21i$; 3) $8 - 6i$; 4) $-\frac{23}{61} - \frac{9}{61}i$.

2. Построить точки, изображающие комплексные числа ± 1, i, $-2i$, $-1 + i$, $2 - 3i$.
3. Найти модуль и аргументы комплексных чисел. Изобразить в виде векторов и представить в тригонометрической форме:

1) $-1 - i$; 2) $1 - i$; 3) $-1 + i\sqrt{3}$; 4) $-1 - i\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{3} - i$.

Ответы: 1) $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$; 2) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$;

3) $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$; 4) $2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$; 5) $2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$.

4. Решить уравнения:

1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-2x+5=0$; 3) $x^2-4x+13=0$.

Ответы: 1) $\pm 5i$; 2) $1\pm 2i$; 3) $2\pm 3i$.

Домашнее задание:

1. Построить точки, изображающие комплексные числа ± 2, $\pm 3i$, $3+2i$, $3-2i$.
2 Найти:

1) $Z_1\pm Z_2$; 2) Z_1Z_2; 3) Z_1^2; 4) $\frac{z_1}{z_2}$, если $Z_1=-4+2i$, $Z_2=3-i$.

3. Найти модуль и аргументы комплексных чисел. Изобразить в виде векторов и представить в тригонометрической форме:

1) ± 1; 2) $\pm i$; 3) $1+i$; 4) $-1+i$; 5) $\sqrt{3}+i$.

4. Решить уравнения:

1) $x^2+144=0$; 2) $x^2-2x+10=0$.

5. Повторить и записать в тетрадь основные формулы элементарной алгебры. Формулы сокращенного умножения. Действия над дробями. Свойства степенных и показательных функций, свойства логарифмов. Основные формулы тригонометрии.

Ответы:

2. 1) $-1+i$, $-7+3i$; 2) $-10+10i$; 3) $12-16i$; 4) $-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$.

3. 1) $\cos 0+i\sin 0$, $\cos\pi+i\sin\pi$; 2) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$; 4) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$; 5) $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$.

Задание 3. Векторы. Проекции векторов. Линейные операции над векторами.

Аудиторное задание:

1. Построить следующие точки по их декартовым координатам: A(3; 4; 6), B(–5; 3; 1), C(1; –3; –5), D(0; –3; 5), E(–3; –5; 0), F(–1, –5; –3).
2. Найти координаты точек, симметричных точкам: A(2; 3; 1), B(5; –3; 2), C(–3; 2; –1), D(a; b; c).

Относительно:

1) плоскости OXY;
2) плоскости OXZ;
3) плоскости OYZ;
4) оси абсцисс;
5) оси ординат;
6) оси апликат;
7) начала координат.

Ответы: 1) (2; 3; –1), (5; –3; –2), (–3; 2; 1), (a; b; –c); 2) (2; –3; 1), (5; 3; 2), (–3; –2; –1), (a; –b; c); 3) (–2; 3; 1), (–5; –3; 2), (3; 2; –1), (–a; b; c); 4) (2; –3; –1), (5; 3; –2), (–3; –2; 1), (a; –b; –c); 5) (–2; 3; –1), (–5;–3; –2), (3; 2; 1), (–a; b; –c); 6) (–2; –3; 1), (–5; 3; 2), (3; –2; –1), (–a; –b; c); 7) (–2; –3; –1), (–5; 3; –2), (3; –2; 1), (–a; –b; –c).

3. Даны точки: A(1; –2; –3), B(2; –3; 0), C(3; 1; –9), D(–1; 1; 12). Вычислить расстояние между 1) A и C; 2) B и D; 3) C и D.

Ответы: 1) 7; 2) 13; 3) 5.

4. Даны вершины A(2; –1; 4), B(3; 2; –6), C(–5; 0; 2) треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

Ответ: 7.

5. Даны точки A(3; –1; 2) и B(–1; 2; 1). Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

Ответ: $\overline{AB}$ =(–4; 3; –1); $\overline{BA}$ =(4; –3; 1).

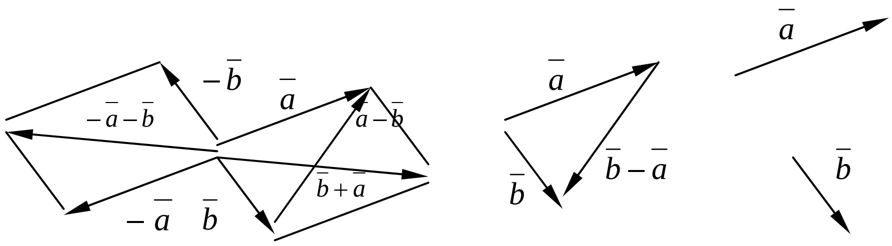
6. Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

Ответ: ($\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3}$); ($-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3}$).

7. По данным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить каждый из следующих векторов:

1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-\overline{b}$; 3) $2\overline{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\overline{b}$; 5) $2\overline{a}+3\overline{b}$; 6) $\frac{1}{3}\overline{a}-\overline{b}$.

Ответ: см. рис.



8. Даны два вектора $\overline{a}$ =(3; –2; 6) и $\overline{b}$ =(–2; 1; 0). Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-\overline{b}$; 3) $2\overline{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\overline{b}$; 5) $2\overline{a}+3\overline{b}$; 6) $\frac{1}{3}\overline{a}-\overline{b}$.

Ответы: 1) (1; –1; 6); 2) (5; –3; 6); 3) (6; –4; 12); 4) (1; $\frac{1}{2}$; 0); 5) (0; –2; 12);

6) (3; $-\frac{5}{3}$; 2).

9. Даны точки A(–1; 5; –10), B(5; –7; 8), C(2; 2; –7), D(5; –4; 2). Проверить, что вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны. Установить какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположную стороны.

Ответ: $\overline{AB}$ в 2 раза длиннее $\overline{CD}$, направлены в одну сторону.

10. Даны три вектора $\overline{p}$=(3; –2; 1), $\overline{q}$=(–1; 1; –2), $\overline{r}$=(2; 1; –3). Найти разложение вектора $\overline{c}$=(11; –6; 5) по базису $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

Ответ: $\overline{c}=2\overline{p}-3\overline{q}+\overline{r}$.

Домашнее задание:

1. Вычислить расстояние от начала координат O до точек: A(4; –2; –4), B(–4; 12; 6), C(12; –4; 3); D(12; 16 –15).
2. Даны вершины M_1(3; 2; –5), M_2(1; –4; 3), M_3(–3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.
3. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\overline{a}$=(3; –1; 4), если его начало совпадает с точкой M(1; 2; –3).
4. В треугольнике ABC вектор $\overline{AB}=\overline{m}$ и вектор $\overline{AC}=\overline{n}$. Построить каждый из следующих векторов:

1) $\frac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$; 2) $\frac{\overline{m}-\overline{n}}{2}$; 3) $\frac{\overline{n}-\overline{m}}{2}$; 4) $-\frac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$.

Принимая в качестве масштабной единицы $\frac{1}{2}|\overline{n}|$ построить также векторы:

5) $|\overline{n}|\overline{m}+|\overline{m}|\overline{n}$; 6) $|\overline{n}|\overline{m}-|\overline{m}|\overline{n}$.

5. Определить при каких значениях α и β векторы $\overline{a}=-2\overline{i}+3\overline{j}+\beta\overline{k}$ и $\overline{b}=\alpha\overline{i}-6\overline{j}+2\overline{k}$ коллинеарны.

Ответы:

1. OA=6; OB=14; OC=13; OD=25.
2. (2; –1; 1); (–1; –2; 2); (0; 1; –2).
3. N(4; 1; 1).
5. α=4; β=–1.

Занятие 4. Скалярное произведение. Применение скалярного произведения.

Аудиторное задание:

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, вычислить:

1) $(\bar{a}, \bar{b})$; 2) $(\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b})$.

Ответ 1) –6; 2) 13.

2. Дано, что $|\bar{a}|$=3, $|\bar{b}|$=5. Определить при каком значении α векторы $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ и $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

3. Даны векторы $\bar{a}$=(4; –2; –4), $\bar{b}$=(6; –3; 2). Вычислить:

1) $(\bar{a}, \bar{b})$; 2) $\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$; 3) $(2\bar{a}-3\bar{b}, \bar{a}+2\bar{b})$.

Ответы: 1) 22; 2) 6; 3) –200.

4. Вычислить, какую работу производит сила $\bar{f}$=(3; –2; –5), когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A(2; –3; 5) в положение B(3; –2; –1).

Ответ: 31.

5. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\bar{a}$=(2; –4; 4) и $\bar{b}$=(–3; 2; 6).

Ответ: $\cos\varphi = \frac{5}{21}$.

6. Даны вершины треугольника A(3; 2; –3), B(5; 1; –1) и C(1; –2; 1). Определить его внешний угол при вершине A.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

7. Даны три вектора: $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$ и $\bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$. Вычислить $пр_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})$.

Ответ: –4.

Домашнее задание:

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, вычислить:

1) $(\bar{a}, \bar{a})$; 2) $(\bar{b}, \bar{b})$; 3) $(3\bar{a}-2\bar{b}, \bar{a}+2\bar{b})$; 4) $(\bar{a}-\bar{b}, \bar{a}-\bar{b})$.

2. Даны векторы $\bar{a}$=(4; –2; –4), $\bar{b}$=(6; –3; 2). Вычислить:

1) $\sqrt{(\bar{b},\bar{b})}$; 2) $(\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+\bar{b})$; 3) $(\bar{a}-\bar{b},\ \bar{a}-\bar{b})$.

3. Даны вершины треугольника A(−1; −2; 4), B(−4; −2; 0) и C(3; −2; 1). Определить его внутренний угол при вершине B.
4. Найти проекцию вектора $\bar{s}$ =($\sqrt{2}$; −3; −5) на ось, составляющую с координатными осями OX и OZ углы $\alpha=45^{o}$, $\beta=60^{o}$, а с осью OY – острый угол β.

Ответы:

1. 1) 9; 2) 16; 3) −61; 4) 37.
2. 1) 7; 2) 129; 3)41.
3. 45^{o}.
4. −3.

Занятие 5. Векторное и смешанное произведение векторов.

Аудиторное задание:

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$; зная, что $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=5$, вычислить $|[\bar{a},\bar{b}]|$.

Ответ: 15.

2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$; зная, что $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, вычислить:

1) $[\bar{a},\bar{b}]^2$, т. е. $([\bar{a},\bar{b}],[\bar{a},\bar{b}])$; 2) $[2\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+2\bar{b}]^2$; 3) $[\bar{a}+3\bar{b},\ 3\bar{a}-\bar{b}]^2$.

Ответы: 1) 3; 2) 27; 3) 300.

3. Даны векторы $\bar{a}$ =(3; −1; −2) и $\bar{b}$ =(1; 2; −1). Найти координаты векторных произведений:

1) $[\bar{a},\bar{b}]$; 2) $[2\bar{a}-\bar{b},\ 2\bar{a}+\bar{b}]$.

Ответы: 1) (5; 1; 7); 2) (20; 4; 28).

4. Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; −3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Ответ: 14 кв. ед.

5. Даны три вектора $\bar{a}$ =(1; −1; 3), $\bar{b}$ =(−2; 2; 1) и $\bar{c}$ =(3; −2; 5). Вычислить $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

Ответ: −7.

6. Доказать, что четыре точки A(1; 2; −1), B(0; 1; 5), C(−1; 2; −1) и D(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.
7. Даны вершины тетраэдра: A(2; 3; 1), B(4; 1; −2), C(6; 3; 7) и D(−5; −4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Ответ: 11.

Домашнее задание:

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, зная, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, вычислить:

1) $|[\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}-\bar{b}]|$; 2) $|[3\bar{a}-\bar{b}, \bar{a}-2\bar{b}]|$.

2. Даны векторы $\bar{a}$ =(3; –1; –2) и $\bar{b}$ =(1; 2; –1). Найти координаты векторного произведения: $[2\bar{a}+\bar{b}, \bar{b}]$.
3. Установить компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a}$ =(2; –1; 2), $\bar{b}$ =(1; 2; –3) и $\bar{c}$ =(3; –4; 7).
4. Объем тетраэдра v=5, три его вершины находятся в точках A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OY.
5. Задачи из типового расчета (Т. Р.).

Ответы:

1. 1) 24; 2) 60.
2. (10; 2; 14).
3. Компланарны.
4. D_1(0; 8; 0), D_2(0; –7; 0).

Занятие 6. Коллоквиум №1 “Комплексные числа. Векторная алгебра”.

Домашнее задание:

Подготовить первую часть Т. Р. к защите.

Занятие 7. Уравнение плоскости.

Аудиторное задание:

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M_1(2; 1; –1) и имеет нормальный вектор $\bar{n}$ =(1; –2; 3).

Ответ: x–2y+3z+3=0.

2. Даны две точки M_1(3; –1; 2) и M_2(4; –2; –1). Составить уравнение плоскости, проходящей, через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Ответ: x–y–3z+2=0.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1(2; –1; 3) и M_2(3; 1; 2) параллельно вектору $\bar{a}$ =(3; –1; 4).

Ответ: x–y–z=0.

4. Определить при каких значениях l и m следующая пара уравнений 2x+ly+3z–5=0

mx–6y–6z+2=0

будет определять параллельные плоскости.

Ответ: $l=3$; $m=-4$.

5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -1; 1)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-z+1=0$, $y=0$.

Ответ: $x+2z-4=0$.

6. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $M_1(2; -3; 3)$ параллельно плоскости OXY;
2) через точку $M_2(1; -2; 4)$ параллельно плоскости OXZ.

Ответы: 1) $z-3=0$; 2) $y+2=0$.

7. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси OX;
2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси OY.

Ответы: 1) $y+4z+10=0$; 2) $x-z-1=0$.

8. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

Ответ 8 куб. ед.

9. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d точки от плоскости в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(-2; -4; 3)$, $2x-y+2z+3=0$;
2) $M_2(1; 2; -3)$, $5x-3y+z+4=0$;
3) $M_3(9; 2; -2)$, $12y-5z+5=0$.

Ответы: 1) $\delta=-3$, $d=3$; 2) $\delta=0$, $d=0$ – точка M_2 лежит на плоскости; 3) $\delta=-3$, $d=3$.

Домашнее задание:

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\overline{n}=(5; 0; -3)$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$ и параллельно двум векторам $\overline{a}_1=(3; 1; -1)$ и $\overline{a}_2=(1; -2; 1)$.
3. Определить при каком l уравнения $7x-2y-z=0$

$$lx+y-3z-1=0$$

   будет определять перпендикулярные плоскости.
4. Определить двугранные углы, образованные пересечением плоскостей: $3y-z=0$, $2y+z=0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно плоскости $x-2y+3z-5=0$.
6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости OYZ.
7. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси OZ;
8. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла OXY.
9. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d точки от плоскости в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(2; -1; -1)$, $16x-12y+15z-4=0$;
2) $M_2(3; -6; 7)$, $4x-3z-1=0$;

Ответы:

1. $5x-3z=0$;
2. $x+4y+7z+16=0$;
3. $-\frac{1}{7}$;
4. $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$;
5. $4x-y-2z-9=0$;
6. $x+5=0$;
7. $5x+y-13=0$;
8. 240 кв. ед.
9. 1) $\delta=1$, $d=1$; 2) $\delta=-2$, $d=2$.

Занятие 8. Уравнение прямой. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Аудиторное задание:

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3) параллельно:

1) вектору $\bar{a}=(2; -3; 5)$; 2) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; 3) оси OX; 4) оси OY; 5) оси OZ.

Ответы: 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$;
4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$.

2. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через две точки (3; –1; 2), (2; 1; 1).

Ответ: $x=t+2$; $y=-2t+1$; $z=t+1$.

3. Составить канонические уравнения следующей прямой:

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$ положить $z_0=0$.

4. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}, \quad 2x+3y+z-1=0$$

Ответ: (2; –3; 6).

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

Ответ: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$.

7. Найти проекцию точки $P(2; -1; 3)$ на прямую $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

Ответ: (3; –2; 4).

8. Найти точку Q, симметричную точке $P(1; 3; -4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Ответ: $Q(-5; 1; 0)$.

Домашнее задание:

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

1) (1; –2; 1), (3; 1; –1); 2) (3; –1; 0), (1; 0; –3); 3) (0; –2 ; 3), (3; –2; 1); 4) (1; 2; –4), (–1; 2; –4).

2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки (0; 0; 1), (0; 1; –2).

3. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\begin{matrix} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=-6t+1 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$$

4. Найти острый угол между прямыми;

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}},\quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

6. Найти проекцию точки $P(5; 2; -1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

Ответы:

1. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-2}$;

   4) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{0}$.

2. $x=0$; $y=t$; $z=-3t+1$.

4. 60°.

5. $2x-3y+4z-1=0$.

6. (1; 4; –7).

Занятие 9. Прямая с угловым коэффициентом. Кривые 2-го порядка.

Аудиторное задание:

1. Определить точки пересечения прямой 2x–3y–12=0 с координатными осями и построить эту прямую.

Ответ: (6; 0), (0; –4).

2. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями 4x+3y–5=0, x–3y+10=0, x–2=0. Определить координаты его вершин.

Ответ: A(2; –1), B(–1; 3), C(2; 4).

3. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси OY, для каждой из прямых:

1) 5x–y+3=0; 2) 5x+3y+2=0.

Ответ: 1) k=5, b=3; 2) k= $-\frac{5}{3}$, b= $-\frac{2}{3}$.

4. Дана прямая 2x+3y+4=0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0(2; 1):

1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.

Ответы: 1) 2x+3y–7=0; 2) 3x–2y-4=0.

5. Составить уравнение окружности:

1) центр окружности совпадает с точкой C(2; –3) и ее радиус R=7;
2) окружность проходит через точку A(2; 6) и ее центр совпадает с точкой C(–1; 2).

Ответы: 1) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; 2) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

6. Какие из уравнений определяют окружности. Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$; 3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Ответы: 1) C(5; –2), R=5; 2) точка (5; –2); 3) C(1; –2), R=5.

7. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2; 2) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10; 3) его большая ось равна 30, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Ответы: 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 3) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

8. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти:

1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Ответы: 1) 5 и 3; 2) $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; 4) $x = \pm\frac{25}{4}$.

9. Определить полуоси эллипса $9x^2+25y^2=1$.

Ответ: $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$.

10. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
1) ее оси 2a=10 и 2b=8;
2) расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
3) уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c=20.

Ответы: 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 3) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

11. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти:
1) полуоси a и b; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

Ответы: 1) a=3, b=4; 2) $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $y = \pm\frac{4}{3}x$; 5) $x = \pm\frac{9}{5}$.

12. Найти полуоси и уравнения асимптот гиперболы $3y^2 - 2x^2 = 3$. Построить чертеж.

Ответ; b=1, a=$\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$.

Домашнее задание:

1. Определить точки пересечения двух прямых 3x–4y–29=0, 2x+5y+19=0.
2. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси OY, для каждой из прямых:
1) 2x+3y–6=0; 2) 3x+2y=0.
3. Даны уравнения двух сторон прямоугольника 2x–3y+5=0, 3x+2y–7=0 и одна из его вершин A(2; –3). Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.
4. Составить уравнение окружности:
1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус R=3;
2) точки A(3; 2) и B(–1; 6) являются концами одного из диаметров окружности.
5. Какие из уравнений определяют окружности. Найти центр C и радиус R каждой из них:
1) $(x+2)^2+y^2=64$; 2) $x^2+(y-5)^2=5$; 3) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$.
6. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
1) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=10;
2) расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
3) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

7. Определить полуоси эллипса $4x^2+9y^2=25$.
8. Составить уравнение гиперболы, если:
1) расстояние между фокусами $2c=10$ и ось $2b=8$;
2) ось $2a=16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

Ответы:
1. (3; –5);
2. 1) $k=-\frac{2}{3}$, $b=2$; 2) $k=-\frac{3}{2}$, $b=0$;
3. $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$;
4. 1) $x^2+y^2=9$; 2) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$;
5. 1) C(–2; 0), R=8; 2) C(0; 5), $R=\sqrt{5}$; 3) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости;
6. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$;
7. $\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{3}$;
8. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

Занятие 10. Парабола. Преобразование уравнения кривой 2-го порядка, не содержащего члена с произведением координат.

Аудиторное задание:

1. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что:
1) парабола находится верхней полуплоскости симметрично относительно оси OY, и ее параметр $p=\frac{1}{4}$;
2) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси OY и ее параметр p=3.

Ответы: 1) $x^2=\frac{1}{2}y$; 2) $x^2=-6y$.

2. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:
1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$; 3) $y^2=-4x$; 4) $x^2=-y$.

Ответы:
1) p=3; в правой полуплоскости симметрично оси OX;
2) p=2,5; в верхней полуплоскости симметрично оси OY;
3) p=2; в левой полуплоскости симметрично оси OX;
4) $p=\frac{1}{2}$; в нижней полуплоскости симметрично оси OY.

3. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:
1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$,
2) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

Ответы: 1) C(3; –1), полуоси 3 и $\sqrt{5}$, $\varepsilon=\frac{2}{3}$, уравнения директрис $2x-15=0$, $2x+3=0$; 2) C(1; –2), полуоси $2\sqrt{3}$ и 4, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, уравнения директрис $y-6=0$, $y+10=0$.

4. Установить какая линия определяется уравнением: $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$. Изобразить линию на чертеже.

Ответ: Половина эллипса $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{4}=1$, расположенная над прямой $y+7=0$.

5. Установить, что уравнение определяет гиперболу и найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

Ответ: C(2; –3), a=3, b=4, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, уравнения асимптот: $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$; уравнения директрис $5x-1=0$, $5x-19=0$.

6. Установить, какая линия определяется уравнением: $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$. Изобразить линию на чертеже.

Ответ: часть гиперболы $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$, расположенная над прямой $y+1=0$.

7. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:
1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=-3\sqrt{-2x}$; 3) $x=\sqrt{5y}$; 4) $x=-\sqrt{3y}$.
Изобразить эти линии на чертеже.
Ответы: 1) часть параболы $y^2=4x$, расположенная в первом координатном углу; 2) часть параболы $y^2=-18x$, расположенная в третьем координатном углу; 3) часть параболы $x^2=5y$, расположенная в первом координатном углу; 4) часть параболы $x^2=3y$, расположенная во втором координатном углу.

8. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу и найти координаты ее вершины A, величину параметра p:
1) $x=2y^2-12y+14$; 2) $x=-y^2+2y-1$.

Ответы: 1) A(–4; 3), p=$\frac{1}{4}$; 2) A(0; 1), p=$\frac{1}{2}$.

9. Установить линию определяющуюся уравнением $y = 3 - 4\sqrt{x-1}$. Сделать чертеж.

Ответ: часть параболы $(y-3)^2=16(x-1)$, расположенная над прямой y–3=0.

10. Определить тип каждого уравнения и сделать чертеж:

1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;
2) $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$.

Ответы: 1) Эллиптическое уравнение; представляет эллипс $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$; C(5; –2) – центр эллипса. 2) Эллиптическое уравнение $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = -1$ - не определяет никакого геометрического образа.

Домашнее задание:

1. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что:
   1) парабола находится правой полуплоскости симметрично относительно оси OX, и ее параметр p=3;
   2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси OX и ее параметр p=0,5.
2. Установить, что уравнение $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$ определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:
3. Установить какая линия определяется уравнением: $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$.

   Изобразить линию на чертеже.
4. Установить, что уравнение $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ определяет гиперболу и найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.
5. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = \sqrt{-x}$; 2) $y = -2\sqrt{x}$; 3) $x = -5\sqrt{-y}$; 4) $x = 4\sqrt{-y}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

6. Установить, что уравнение $x=-\frac{1}{4}y^2+y$ определяет параболу и найти координаты ее вершины A, величину параметра p.
7. Установить линию определяющуюся уравнением $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$.
8. Определить тип уравнения $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$. И сделать чертеж.

Ответы:

1. 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$;

2. C(–1; 2), полуоси 5 и4, $\varepsilon = \frac{3}{5}$, уравнения директрис 3x–22=0, 3x+28=0;
3. Половина эллипса $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$, расположенная над прямой y–1=0;
4. C(–5; 1), a=8, b=6, $\varepsilon = 1{,}25$, уравнения асимптот: 3x+4y+11=0, 3x–4y+19=0; уравнения директрис x=11,4 и x=1,4;
5. 1) часть параболы $y^2=-x$, расположенная во втором координатном углу;
   2) часть параболы $y^2=4x$, расположенная в четвертом координатном углу;
   3) часть параболы $x^2=-25y$, расположенная в третьем координатном углу;
   4) часть параболы $x^2=-16y$, расположенная в четвертом координатном углу;
6. A(1; 2), p=2;
7. часть гиперболы $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1$, расположенная над прямой y–7=0;
8. Гиперболическое уравнение; определяет вырожденную гиперболу – пару пересекающихся прямых: 2x–y+1=0 и 2x+y+3=0.

Занятие 11. Поверхности 2-го порядка.

Аудиторное задание:

1. Установить, какие геометрические образы определяются следующими уравнениями в декартовых прямоугольных координатах пространства:

1) x=0; 2) z=0; 3) y+2=0; 4) $x^2+y^2+z^2=25$; 5) $x^2+2y^2+3z^2=0$; 6) x–y=0; 7) y–z=0; 8) xz=0; 9) xyz=0; 10) $xy-y^2=0$.

Ответы: 1) плоскость OYZ; 2) плоскость OXY; 3) плоскость, параллельная плоскости OXZ и лежащая в левом полупространстве на расстоянии двух единиц от нее; 4) сфера с центром в начале координат и радиусом 5; 5) уравнение определяет точку – начало координат; 6) плоскость, которая делит пополам двугранный угол между плоскостями OXZ и OYZ и проходит в 1, 3, 5 и 7 октантах; 7) плоскость, которая делит пополам двугранный угол между плоскостями OXY и OXZ и проходит в 1, 2, 7 и 8 октантах; 8) плоскости OXY и OYZ; 9) совокупность всех трех координатных плоскостей; 10) плоскость OXZ и плоскость, которая делит пополам двугранный угол между плоскостями OXZ и OYZ и проходит в 1, 3, 5 и 7 октантах.

2. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x-2=0 \\ y=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x-5=0 \\ z+2=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ x=0 \end{cases}$.

Ответы: 1) ось OY; 2) прямая, проходящая через точку (2; 0; 0) параллельно оси OZ; 3) прямая, проходящая через точку (5; 0; –2) параллельно оси OY; 4) окружность, лежащая на плоскости OXY, с центром в начале координат и радиусом, равным 3; 5) окружность, лежащая на плоскости OYZ, с центром в начале координат и радиусом, равным 5.

3. Установить, какие геометрические образы определяются в пространственной системе координат следующими уравнениями:

1) $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$; 2) $x^2=6z$; 3) $x^2-z^2=0$; 4) $x^2+4y^2+4=0$; 5) $y^2+z^2=-z$.

Ответы: 1) цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OX, имеющая направляющей эллипс, который на плоскости OXZ определяется уравнением $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$; 2) цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OY, имеющая направляющей параболу, которая на плоскости OXZ определяется уравнением $x^2=6z$;
3) цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OY, имеющая направляющей пару прямых, которые на плоскости OXZ определяются уравнениями $x-z=0$, $x+z=0$, эта цилиндрическая поверхность состоит из двух плоскостей; 4) уравнение никакого геометрического образа не определяет; 5) цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OX, направляющая на плоскости OYZ определяется уравнением $y^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

4. Составить уравнение сферы, если сфера проходит через начало координат и имеет центр C(4; –4; –2).

Ответ: $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$.

5. Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

Ответ: 4, 3; (4; 0; –1), (–4; 0; –1).

6. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ вокруг оси OZ.

Ответ: $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Домашнее задание:

1. Установить, какие геометрические образы определяются следующими уравнениями в декартовых прямоугольных координатах пространства:

1) $y=0$; 2) $x-2=0$; 3) $z+5=0$; 4) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=49$; 5) $x^2+2y^2+3z^2+5=0$; 6) $x+z=0$; 7) $xy=0$; 8) $yz=0$; 9) $x^2-4x=0$; 10) $yz+z^2=0$.

2. Установить, какие геометрические образы определяются следующими уравнениями в пространственной системе координат:

1) $x^2+z^2=25$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 3) $x^2-xy=0$; 4) $y^2+z^2=0$; 5) $x^2+z^2=2z$

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+2=0 \\ y-3=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} y+2=0 \\ z-5=0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49 \\ y=0 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20 \\ z-2=0 \end{cases}$.

4. Составить уравнение сферы, если точки A(2; −3; 5) и B(4; 1; −3) являются концами одного из диаметров сферы.
5. Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{2}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.
6. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, z=0 вокруг оси OX.

Ответы:

1. 1) плоскость OXZ; 2) плоскость, параллельная плоскости OYZ и лежащая в ближнем полупространстве на расстоянии двух единиц от нее; 3) плоскость, параллельная плоскости OXY и лежащая в нижнем полупространстве на расстоянии 5 единиц от нее; 4) сфера с центром (2; −3; 5) и радиусом 7; 5) Ø ; 6) плоскость, которая делит пополам двугранный угол между плоскостями OXY и OYZ и проходит в 2, 3, 5 и 8 октантах; 7) плоскости OXZ и OYZ;8) плоскости OXY и OXZ; 9) плоскость OYZ и плоскость, параллельная плоскости OYZ и лежащая в ближнем полупространстве на расстоянии 4-х единиц от нее; 10) плоскость OXY и плоскость, которая делит пополам двугранный угол между плоскостями OXY и OXZ и проходит в 3, 4, 5 и 6 октантах.
2. 1) цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OY, имеющая направляющей окружность, которая на плоскости OXZ определяется уравнением $x^2+z^2=25$; 2) цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OZ, имеющая направляющей гиперболу, которая на плоскости OXY определяется уравнением $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 3) цилиндрическая поверхность состоящая из двух плоскостей x=0, x−y=0; 4) ось OX; 5) цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OY, имеющая направляющей окружность, которая на плоскости OXZ определяется уравнением $x^2+(z-1)^2=1$.
3. 1) ось OZ; 2) ось OX; 3) прямая, проходящая через точку (−2; 3; 0) параллельно оси OZ; 4) прямая, проходящая через точку (0; −2; 5) параллельно оси OX; 5) окружность, лежащая на плоскости OXZ, с

4. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$.
5. 3, $\sqrt{3}$; (2; 3; 0), (2; –3; 0), (2; 0; $\sqrt{3}$), (2; 0; $-\sqrt{3}$).
6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$.

Занятие 12. Коллоквиум №2 “Аналитическая геометрия”.

Занятие 13. Матрицы, действия над ними. Обратная матрица. Решение систем уравнений с помощью матриц.

Аудиторное задание:

1. Найти матрицу A+B, если A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: A+B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу 5A–2B, если A=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Найти AB и BA, если A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: AB=$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, BA=$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -2 & 5 & -4 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$.

4. Найти AB, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: AB=$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5. Найти A^{-1}, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: A^{-1}=$\begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу обратную матрице A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: A^{-1}=$\begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему уравнений матричным методом (используя результаты примера 6).

1) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -2x + y + z = 1 \\ 2x - y + 4z = -4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ -2x + y + z = -5 \\ 2x - y + 4z = 10 \end{cases}$

Ответы: 1) x=1, y=2, z=–1; 2) x=2, y=–2, z=1.

Домашнее задание:

1. Найти матрицу A+2B, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $2A^2$+AB, если A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Найти A^{-1}, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему уравнений матричным методом (используя результаты примера 3).

$\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x + 3y = -2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$

Ответы:

1. $\begin{pmatrix} 7 & 11 & 3 \\ 12 & -6 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$; 3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6/13 & -5/13 & 3/13 \\ -2/13 & 6/13 & -1/13 \\ 1/13 & -3/13 & 7/13 \end{pmatrix}$; 4) x=1, y=–1, z=2.

Занятие 14. Решение систем линейных уравнений по формуле Крамера. Исследование на совместимость. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли.

Аудиторное задание:

1. Решить системы уравнений по формуле Крамера:

1) $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x-y+z=13 \\ -x+y+z=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+z=36 \\ 2x-3z=-17 \\ 6x-5z=7 \end{cases}$

Ответы: 1) x=$\frac{49}{2}$, y=$\frac{23}{2}$, z=10; 2) x=2, y=3, z=4; 3) x=$13\frac{1}{4}$, y=$8\frac{1}{4}$, z=$14\frac{1}{4}$.

2. Исследовать на совместимость методом элементарных преобразований расширенной матрицы в следующих системах:

1) $\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y+2z=5 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-2y-2z=-3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 3x+7y+3z=0 \end{cases}$

Ответы: 1) x=2z–1, y=z+1, z – любое действительное число; 2) система не совместима; 3) x=2t, y=–3t, z=5t, t – любое действительное число.

Домашнее задание;

1. Решить системы уравнений по формуле Крамера:

1) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$

2. Исследовать на совместимость методом элементарных преобразований расширенной матрицы в следующих системах:

1) $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1 \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$

3. Система из Т. Р.

Ответы:

1. 1) x=1, y=1, z=1; 2) x=1, y=3, z=5; 3) x=2, y=–1, z=1;

2. 1) система не совместима; 3)система имеет единственное решение x=y=z=0.

Занятие 15. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Аудиторное задание:

Решить системы уравнений.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений, связанных формулами: $x_1 = -\frac{11}{4} + 13x_4 - \frac{31}{8}x_5$; $x_2 = -\frac{3}{8} - \frac{27}{16}x_5$; $x_3 = -1 + 5x_4 - \frac{3}{2}x_5$; x_4 и x_5 – любые действительные числа.

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

Домашнее задание:

Решить системы уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_4=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ -x_1-x_2+2x_3=-1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3=7 \\ 3x_1+x_2-2x_3=5 \end{cases}$

Ответы: 1. (1; 2; 3); 2. система имеет бесконечное множество решений, связанных формулами: $x_1=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}x_3$; $x_2=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_3$; $x_4=-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x_3$; x_3 – любое действительное число; 3. система несовместна; 4. (2; 1; 1).

Занятие 16. Прием и защита типового расчета №1.

Литература.

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая Математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980 – 176 с.
2. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975 – 240 с.