КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Вычислить определенные интегралы.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций.
3. Вычислить длину дуги кривой.
4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигур, ограниченных графиками функций:

а) ось вращения *Ox*;

б) ось вращения *Oy*.

Вариант 1	Вариант 2
1. а) $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cdot \cos^4 3x dx;$ б) $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}};$ в) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx.$ **2.** а) $y=(x-2)^3,\ y=4x-8;$ б) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} x\geq 2.$ **3.** $r=8\cos\varphi,\ 0\leq\varphi\leq \pi/4.$ **4.** $y=-x^2+5x-6,\ y=0.$	**1.** а) $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 \cos^8 x dx;$ б) $\int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}};$ в) $\int_0^{\pi} x\sin x dx.$ **2.** а) $y=4-x^2,\ y=x^2-2x;$ б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases} y\geq 2.$ **3.** $r=6(1+\sin\varphi),\ -\pi/2\leq\varphi\leq 0.$ **4.** $2x-x^2-y=0,\ \ 2x^2-4x+y=0.$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. а) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2\left(x/2\right)\cdot\cos^6\left(x/2\right)dx;$ б) $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx;$ в) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx.$ **2.** а) $y=x\sqrt{9-x^2},\ y=0,\ \ 0\leq x\leq 3;$ б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases} y\geq 4,\ 0\leq x\leq 8\pi.$ **3.** $r=2\varphi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{3}{4}.$ **4.** $y=3\sin x,\ \ y=\sin x,\ \ 0\leq x\leq\pi.$	**1.** а) $\int_0^{2\pi} \sin^4\left(x/4\right)\cdot\cos^4\left(x/4\right)dx;$ б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}};$ в) $\int_{1/e}^{e} \lvert\ln x\rvert dx.$ **2.** а) $y=\sin x\cdot\cos^2 x,\ y=0, 0\leq x\leq\frac{\pi}{2};$ б) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases} y\geq 3.$ **3.** $r=2(1-\cos\varphi),\ -\pi\leq\varphi\leq-\frac{\pi}{2}.$ **4.** $y=5\cos x,\ \ y=\cos x,\ \ x=0,\ \ x\geq 0.$

Вариант 5	**Вариант 6**
1. а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx;$ б) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx;$ в) $\int\limits_0^1 \arccos x dx.$ **2.** а) $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=0,\ \mathrm{x}=1;$ б) $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}\ \mathrm{x} \ge 2.$ **3.** $r=4(1-\sin\varphi),\ 0\le\varphi\le \pi/6.$ **4.** $x=\sin^2 x,\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0.$	**1.** а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx;$ б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}};$ в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x dx.$ **2.** а) $y=x^2\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ 0\le x\le 2;$ б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}\ \mathrm{y}\ge 3,\ 0\le x\le 4\pi.$ **3.** $r=3(1+\sin\varphi),\ -\pi/6\le\varphi\le 0.$ **4.** $y=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1.$
Вариант 7	**Вариант 8**
1. а) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx;$ б) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}};$ в) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$ **2.** а) $y=\cos x\cdot\sin^2 x,\ y=0,\ 0\le x\le \frac{\pi}{2};$ б) $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}\ x\ge 6\sqrt{3}.$ **3.** $r=5(1-\cos\varphi),\ -\pi/3\le\varphi\le 0.$ **4.** $y=xe^x,\ y=0,\ x=1.$	**1.** а) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^2 x\cdot\cos^6 x dx;$ б) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx;$ в) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx.$ **2.** а) $y=\sqrt{e^x-1},\ y=0,\ x=\ln 2;$ б) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}\ \mathrm{y}\ge 3,\ 0\le x\le 6\pi.$ **3.** $r=\sqrt{2}e^{\varphi},\ -\pi/2\le\varphi\le \pi/2.$ **4.** $y=2x-x^2,\ y=-\mathrm{x}+2,\ x=0.$
Вариант 9	**Вариант 10**
1. а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2)\cos^4(x/2)dx;$ б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$	**1.** а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6\left(\frac{x}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)dx;$ б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}};$

в) $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^{12}dx.$ **2.** а) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\ y=0,\ x=1,\ x=e^3;$ б) $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases} \quad y\ge\sqrt{3}.$ **3.** $r=1-\sin\varphi,\ \ -\pi/2\le\varphi\le-\pi/6.$ **4.** $y=2x-x^2,\ \ y=-x+2.$	в) $\int\limits_1^e (x\ln x)^2dx.$ **2.** а) $y=\arccos x,\ y=0,\ \ x=0;$ б) $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} \quad x\ge 4.$ **3.** $r=3e^{3\varphi/4},\ \ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$ **4.** $y=e^{1-x},\ y=0,\ \ x=0,\ x=1.$
Вариант 11	**Вариант 12**
1. а) $\int\limits_0^{2\pi}\sin^8 xdx;$ б) $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2}\dfrac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}};$ в) $\int\limits_{-1}^1\dfrac{xdx}{x^2+x+1}.$ **2.** а) $y=(x+1)^2;$ $y^2=x+1;$ б) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=3\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \quad y\ge 3.$ **3.** $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad \pi/6\le t\le\pi/4.$ **4.** $y=x^2,\ \ y^2-x=0.$	**1.** а) $\int\limits_0^{\pi}2^4\cos^8 xdx;$ б) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx;$ в) $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx.$ **2.** а) $y=2x-x^2+3;$ $y=x^2-4x+3;$ б) $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \end{cases} \quad 0<x<12\pi \quad y\ge 9$ **3.** $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=6\sin^3 t, \end{cases} \quad 0\le t\le\pi/3.$ **4.** $x^2+(y-2)^2=1.$
Вариант 13	**Вариант 14**
1. а) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}2^8\sin^2 x\cos^6 xdx;$ б) $\int\limits_0^5\dfrac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}};$ в) $\int\limits_{-2}^{-1}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ **2.** а) $y=x\sqrt{36-x^2},\ y=0,\ 0\le x\le 6;$	**1.** а) $\int\limits_0^{\pi}2^4\sin^6(x/2)\cos^2(x/2)dx;$ б) $\int\limits_{-5/3}^{1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}dx;$ в) $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx.$ **2.** а) $x=\arccos y,\ x=0,\ y=0;$

б) $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 4.$ **3.** $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq \pi.$ **4.** $y = 1 - x^2,\ x = 0,\ x = \sqrt{y - 2},\ x = 1.$	б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases} \quad y \geq 4.$ **3.** $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$ **4.** $y = x^2,\ y = 1,\ x = 2.$
Вариант 15	**Вариант 16**
1. а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^8\left(x/4\right)dx;$ б) $\int\limits_0^{16} \sqrt{256 - x^2}\,dx;$ в) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \sin 3x\,dx.$ **2.** а) $y = \mathrm{arctg}\,x,\ y = 0,\ x = \sqrt{3};$ б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 6, 0 < x < 12\pi.$ **3.** $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$ **4.** $y = x^3,\ y = \sqrt{x}.$	**1.** а) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^8 x\,dx;$ б) $\int\limits_0^{4} e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16 - x^2}};$ в) $\int\limits_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx.$ **2.** а) $y = x^2\sqrt{8 - x^2},\ y = 0,\ 0 \leq x \leq 2;$ б) $r = \sin\varphi,\ \ r = 2\sin\varphi.$ **3.** $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$ **4.** $y = \sin\left(\pi x/2\right),\ y = x^2.$
Вариант 17	**Вариант 18**
1. а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cdot \cos^6 x\,dx;$ б) $\int\limits_{1/8}^{1} \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\,dx;$ в) $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x\,dx.$ **2.** а) $y = \sqrt{e^x - 1},\ x = 0,\ y = \ln 2;$ б) $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$ **3.** $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$ **4.** $y = \arccos\left(x/3\right),\ y = \arccos x,\ y = 0.$	**1.** а) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cdot \cos^4 x\,dx;$ б) $\int\limits_0^{2} \frac{\left(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x}\right)(2x+2)^2};$ в) $\int\limits_1^{3} x^3\sqrt{x^2 - 1}\,dx.$ **2.** а) $y = x\sqrt{4 - x^2},\ y = 0,\ 0 \leq x \leq 2;$ б) $r = 1/2 + \cos\varphi.$ **3.** $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$ **4.** $y = \arcsin\left(x/5\right),\ y = \arcsin x,\ y = \pi/2.$
Вариант 19	**Вариант 20**

1. а) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$;

б) $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int\limits_{1}^{e^{\pi/2}} \cos \ln x dx$.

2. а) $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}},\ y=0,\ x=1$;

б) $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.

3. $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le 2.$

4. $y=x^2,\ x=2,\ y=0.$

1. а) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^8\left(x/2\right) dx$;

б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$.

2. а) $y=\frac{1}{1+\cos x},\ y=0,\ x=\pi/2,\ x=-\pi/2$;

б) $r=\left(5/2\right)\cdot\sin\varphi,\ r=\left(3/2\right)\cdot\sin\varphi$.

3. $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le \pi.$

4. $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=1.$

Вариант 21

1. а) $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8\left(x/6\right) dx$;

б) $\int\limits_{6}^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos 5x \cos x dx$.

2. а) $x=(y-2)^2,\ x=4y\text{-}8$;

б) $r=\left(3/2\right)\cos\varphi,\ r=\left(5/2\right)\cos\varphi$.

3. $y=e^x+13,\quad \ln\sqrt{15}\le x\le \ln\sqrt{24}.$

4. $y=\sqrt{x-1},\ y=0,\ y=1,\ x=0{,}5.$

Вариант 22

1. а) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx$;

б) $\int\limits_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)(x-2)^2} dx$;

в) $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

2. а) $y=\cos 5x \sin 2x,\ y=0,\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}$;

б) $r=4\cos 4\varphi$.

3. $y=\ln\left(x^2-1\right),\quad 2\le x\le 3.$

4. $y=\ln x,\ x=2,\ y=0.$

Вариант 23

1. а) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx$;

б) $\int\limits_{1}^{8} \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Вариант 24

1. а) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$;

б) $\int\limits_{8}^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$.

2. а) $x=4-y^2,\ x=y^2\text{-}2y$;

2. а) $y=\dfrac{x}{(1+x^2)}$, $y=0$, $x=1$; б) $r=\sin 6\varphi$. **3.** $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\le x\le {}^8\!/_9$. **4.** $y=(x-1)^2$, $y=1$.	б) $r=2\cos\varphi$, $r=3\cos\varphi$. **3.** $y=\mathrm{e}^x+6$, $\ln\sqrt{8}\le x\le \ln\sqrt{15}$. **4.** $y^2=x-2$, $y=0$, $y=x^3$, $y=1$.
Вариант 25	**Вариант 26**
1. а) $\int\limits_{-\pi/2}^{0}2^8\sin^8 x dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{dx}{x^2+x}$. **2.** а) $y=\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$, $y=0$, $x=2$, $x=1$; б) $r=\cos\varphi+\sin\varphi$. **3.** $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $\frac{1}{4}\le x\le 1$ **4.** $y=x^3$, $y=x^2$.	**1.** а) $\int\limits_{0}^{\pi}2^4\cos^8\left({}^x\!/_2\right)dx$; б) $\int\limits_{6}^{9}\sqrt{\dfrac{9-2x}{2x-21}}dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/2}e^x\cos x dx$. **2.** а) $y=x^2\sqrt{16-x^2}$, $y=0$, $0\le x\le 4$; б) $r=2\sin 4\varphi$. **3.** $y=\ln\dfrac{5}{2x}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$. **4.** $y=\arccos {}^x\!/_5$, $y=\arccos {}^x\!/_3$, $y=0$.
Вариант 27	**Вариант 28**
1. а) $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2\left({}^x\!/_4\right)\cos^6\left({}^x\!/_4\right)dx$; б) $\int\limits_{6}^{5}e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}\dfrac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}$; в) $\int\limits_{0}^{1}x(1-x)^2dx$. **2.** а) $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0$, $y=0$, $y=1$; б) $r=2\cos 6\varphi$. **3.** $y=-\ln\cos x$, $0\le x\le {}^\pi\!/_6$. **4.** $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.	**1.** а) $\int\limits_{0}^{\pi}2^4\sin^6 x\cos^2 x dx$; б) $\int\limits_{0}^{64}\dfrac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx$; в) $\int\limits_{0}^{1}(x+1)e^{-x}dx$. **2.** а) $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$; б) $r=\cos\varphi-\sin\varphi$. **3.** $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$. **4.** $y=x^2-2x+1$, $x=2$, $y=0$.
Вариант 29	**Вариант 30**

1. а) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx$; б) $\int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}} dx$; в) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x} dx$. **2.** а) $y = x^2\cos x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi/2$; б) $r = 3\sin\varphi,\ \ r = 5\sin\varphi$. **3.** $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x,\ \ 0 \le x \le 7/9$. **4.** $y = x^3,\ \ y = x$.	**1.** а) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx$; б) $\int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{\left(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x}\right)(3x+1)^2} dx$; в) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$. **2.** а) $x = 4-(y-1)^2,\ x = y^2-4y+3$; б) $r = 6\sin\varphi,\ \ r = 4\sin\varphi$. **3.** $y = \ln x,\ \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$. **4.** $y = \arccos x,\ \ y = \arcsin x,\ \ x = 0$.