Элементы
линейной алгебры
и аналитической геометрии

Ульяновск
2007

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Методические указания к выполнению контрольных заданий
по дисциплине «Высшая математика»

Составитель **Н. Л. Суетина**

Ульяновск
2007

УДК 512.64+514.12
ББК 22.143+22.151.5
Э45

Рецензент кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой «Алгебры и геометрии» УлГПУ Гришина С. А.

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета

Э45 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: методические указания к выполнению контрольных заданий по дисциплине «Высшая математика» / составитель Н. Л. Суетина - Ульяновск: УлГТУ, 2007. - 32 с.

Составлены в соответствии с учебной программой по курсу «Высшая математика». Указания содержат перечень контрольных вопросов и заданий по темам «Матрицы», «Системы линейных уравнений», «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии».

Предназначены для самостоятельной и индивидуальной работы студентов ускоренной формы обучения специальностей «Промышленное и гражданское строительство», «Теплогазоснабжение и вентиляция».

УДК 512.64+514.12
ББК 22.143+22.151.5

Учебное издание

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Составитель СУЕТИНА Наталья Львовна

Методические указания к выполнению контрольных заданий по дисциплине «Высшая математика»

Редактор *О. С. Бычкова*

**Подписано в печать 11.10.2007. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,86.
Тираж 75 экз. Заказ
Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.**

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания предназначены для студентов технических специальностей ускоренной формы обучения. Цель указаний - научить студента самостоятельно решать задачи по темам «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии».

Структура указаний следующая. В начале каждого раздела приводится ряд теоретических вопросов, ответы на которые способствуют самопроверке и обеспечивают необходимую теоретическую подготовку для решения практических заданий. Далее помещены образцы решения задач, характерных для соответствующей контрольной работы. В решениях приведены основные формулы, правила, ссылки на теорию. В последнем пункте даны задания на контрольные работы.

К выполнению контрольной работы студенту следует приступать лишь после изучения по конспекту лекций или учебнику теоретического материала, соответствующего данной теме, и разбора приведенных примеров. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, приводить необходимые формулы. Вычисления должны быть достаточно подробными, располагаться в строгом порядке. Решение каждой задачи следует доводить до ответа, требуемого в условии.

В данных указаниях приняты следующие обозначения: a, AB - векторы, $\backslash a \backslash$ - длина вектора, (AB), I - прямые, AB - отрезок, $\backslash AB \backslash$ - длина отрезка.

1. Контрольная работа № 1.
«Матрицы и определители»

1.1. Теоретические вопросы

1. Записать формулы вычисления определителей 2-го и 3-го порядка.
2. Дать определения минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
3. Написать формулу разложения определителя 4-го порядка по 1-й строке.
4. Дать определения суммы двух матриц, произведения матрицы на число.
5. При каком условии возможно умножение двух матриц? Что называется произведением матриц?
6. Какое преобразование матрицы называется транспонированием?
7. Дать определение обратной матрицы. При каком условии матрица имеет обратную? Записать формулу вычисления обратной матрицы.
8. Что называется рангом матрицы? Какие преобразования не изменяют ранга матрицы?
9. Как вычисляется ранг матрицы?

1.2. Указания к решению задач

__Пример 1__. Вычислить определитель матрицы путем разложения его по строке (столбцу).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для разложения определителя можно выбрать любую строку (столбец). В данном примере разложим определитель по элементам 2-й строки, т. к. в ней содержится нулевой элемент $(a_{22} = 0)$.

Формула разложения определителя по 2-й строке:
$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = 1A_{21} + 0 + 5A_{23} + 2A_{24}$,
где $A_{2i} (i = 1...4)$ – алгебраические дополнения к элементам a_{2i}.

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-11) = 11$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 40$$

$\det A = 1\cdot 11 + 5\cdot 9 + 2\cdot 40 = 136$.

Пример 2. Для матриц A, B, C найти: а) $2A+3B$, б) $A\cdot C^T$, в) A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) $2A+3B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 18 & 10 & 6 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 & 15 \\ -9 & 12 & 18 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 13 \\ 9 & 22 & 24 \\ 8 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

б) Транспонируем матрицу C.

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что C^T имеет размерность 3×2, A – размерность 3×3. Следовательно, произведение AC^T существует и имеет размерность 3×2.

$$AC^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент αij $(i = 1,2,3,\ j = 1,2)$ равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы C^T.

$\alpha_{11} = 2\cdot 2 + 3(-3) + (-1)\cdot 1 = -6$

$\alpha_{12} = 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + (-1)\cdot 1 = 22$

$\alpha_{21} = 9\cdot 2 + 5(-3) + 3\cdot 1 = 6$

$\alpha_{22} = 9\cdot 4 + 5\cdot 5 + 3\cdot 1 = 64$

$\alpha_{31} = 4\cdot 2 + 0\cdot(-3) + (-2)\cdot 1 = 6$

$\alpha_{32} = 4\cdot 4 + 0\cdot 5 + (-2)\cdot 1 = 14$.

$$AC^T = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ 6 & 64 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

в) Проверим, выполняется ли достаточное условие существования обратной матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 90$$

$\det A \neq 0$, следовательно A^{-1} существует. Найдем присоединенную матрицу A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{ij} матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 30$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -17.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 30 & 0 & -15 \\ -20 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*, \qquad A^{-1} = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 30 & 0 & -15 \\ -20 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

Пример 3: Найти ранг матрицы Q.

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для нахождения ранга матрицы достаточно привести ее к ступенчатому виду. Матрица называется ступенчатой, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк. Чтобы привести матрицу Q к ступенчатой форме, совершим над ее строками элементарные преобразования. Они указаны справа от соответствующей строки. Например, II-2I – из 2-й строки вычитаем 1-ю строку, умноженную на 2 и т. д.

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ II \quad -I \\ III \quad -2I \\ IV \quad -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & 9 \\ 0 & -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ III \quad +3II \\ IV \quad +2II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, ранг $Q=2$.

2. Контрольная работа № 2. «Системы линейных уравнений»

2.1. Теоретические вопросы

1. Что называется решением системы уравнений? Сколько решений может иметь система линейных уравнений?

2. Какие системы называют совместными, несовместными, определенными, неопределенными?

3. При каком условии система n уравнений с n неизвестными будет определенной?

4. Метод Крамера. Формулы Крамера.

5. Основная и расширенная матрицы системы. Теорема Кронекера-Капелли.

6. Метод Гаусса.

7. Однородная система линейных уравнений. При каком условии однородная система имеет ненулевое решение?

8. Что называется фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы? Сколько векторов содержит ФСР? Как находятся эти векторы?

2.2. Указания к решению задач

Пример 1: Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ 9x+5y+3z=0 \\ 4x-2z=-10 \end{cases}.$$

Решение: Найдем главный определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}=90.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера.

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Здесь Δx – определитель, полученный из главного определителя Δ путем замены столбца коэффициентов при неизвестном x на столбец свободных членов Δy и Δz – определяются аналогично.

$$\Delta x=\begin{vmatrix}4&3&-1\\0&5&3\\-10&0&2\end{vmatrix}=-180,\ \Delta y=\begin{vmatrix}2&4&-1\\9&0&3\\4&-10&-2\end{vmatrix}=270,\ \Delta z=\begin{vmatrix}2&3&4\\9&5&0\\4&0&-10\end{vmatrix}=90$$

$x=-2,\ y=3,\ z=1.$

Ответ: $(-2{,}3{,}1)$.

Пример 2: Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases}x-2y+3z+t=-1\\-2x+3y+z+2t=9\\5x-6y+2z+3t=-17\\2x-4y+4z+3t=-7\end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольной форме путем элементарных преобразований (они указаны справа у каждой строки).

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&1&-1\\-2&3&1&2&9\\5&-6&2&3&-17\\2&-4&4&3&-7\end{array}\right)\begin{array}{l}II+I\\III-5I\\IV-2I\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&1&-1\\0&-1&7&4&7\\0&4&-13&-2&-12\\0&0&-2&1&-5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\III+4II\\\\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc}1&-2&3&-1\\0&-1&7&7\\0&0&15&16\\0&0&-2&-5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\III\cdot 2\\IV\cdot 15\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&1&-1\\0&-1&7&4&7\\0&0&30&28&32\\0&0&-30&15&-75\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\III\cdot\frac{1}{2}\\IV+III\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&1&-1\\0&-1&7&4&7\\0&0&15&14&16\\0&0&0&43&-43\end{array}\right)$$

Запишем систему, соответствующую последней расширенной матрице, и найдем неизвестные.

$$\begin{cases}x-2y+3z+t=-1\\-y+7z+4t=7\\15z+14t=16\\43t=-43\end{cases}$$

$t=-1$
$z=(16-14t):15=30:15=2$
$-y=7-7z-4t=7-14+4=-3, y=3$
$x=-1+2y-3z-t=-1+6-6+1=0$.
Ответ: (0; 3; 2; −1).

Пример 3: Доказать, что система совместна, и найти решение

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3+4x_4=7 \\ -3x_1+4x_2+x_3-4x_4=3 \\ x_1+x_2-4x_3-3x_4=-10 \end{cases}.$$

Решение: Основная матрица A и расширенная матрица $(A|B)$ имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad (A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10 \end{array}\right).$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10 \end{array}\right)\begin{matrix} I-2III \\ II+3III \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -7 & 11 & 10 & 27 \\ 0 & 7 & -11 & -10 & -27 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10 \end{array}\right)\begin{matrix} I+II \\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & -10 & -27 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -10 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(A/B)=2$, то система совместна и $r=2<n=3$ неопределенна. Система после преобразования матрицы имеет вид

$$\begin{cases} 7x_2-11x_3-10x_4=-27 \\ x_1+x_2-4x_3-3x_4=-10 \end{cases}.$$

Ранг системы $r=2$, следовательно, количество главных неизвестных будет 2, а свободных $n-r=4-2=2$. Выберем главные неизвестные. В основной матрице системы найдем минор 2-го порядка, отличный от нуля, например, $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы соответствуют неизвестным x_1 и x_2. Перепишем последнюю систему, перенося свободные неизвестные x_3 и x_4 в правую часть:

$$\begin{cases} 7x_2=-27+11x_3-10x_4 \\ x_1+x_2=-10+4x_3+3x_4 \end{cases}.$$

Выражая главные неизвестные через свободные, имеем:

$$x_2 = -\frac{27}{7} + \frac{11}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_4$$

$$x_1 = -\frac{43}{7} + \frac{17}{7}x_3 + \frac{11}{7}x_4$$

Обозначим свободные неизвестные $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Общее решение системы:

$$\left(-\frac{43}{7} + \frac{17}{7}C_1 + \frac{11}{7}C_2;\ -\frac{27}{7} + \frac{11}{7}C_1 + \frac{10}{7}C_2;\ C_1;\ \ C_2\right).$$

Придавая C_1, C_2 любые значения, получим частное решение системы. Например при $C_1 = 7$, $C_2 = 0$ $\left(\frac{76}{7},\ -\frac{16}{7},\ 7,\ 0\right)$.

Пример 4: Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 9 \\ 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 16 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение: Проведем элементарные преобразования с расширенной матрицей системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 3 & 6 & 9 \\ 7 & -5 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 5III \\ II - 7III \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 6 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & 9 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \cdot \frac{1}{2} \\ II \cdot \frac{1}{3} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - II \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно, $r(A) = 2$, $r(A|B) = 3$. Следовательно, система не совместна.

Пример 5: Найти фундаментальную систему решений однородной системы и ее общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение: Матрицу системы приведем к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ II - 2 \cdot I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $r(A)=2<4=n$. Следовательно, система имеет нетривиальное решение. Минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, поэтому главными неизвестными будут x_1, x_2, а x_3, x_4 – свободными.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4x_3 - 4x_4 \\ -x_2 = -3x_3 + x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -5x_3 + 2_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

Обозначим свободные неизвестные x_3 – через C_1, x_4 – через C_2.

Тогда общее решение: $\left(-5C_1 + 2C_2;\ 3C_1 - C_2;\ C_1;\ C_2\right)$. Получим фундаментальную систему решений (ФСР). Возьмем два линейно-независимых двумерных вектора (1;0) и (0;1). Подставляя компоненты каждого из них в общее решение в качестве C_1 и C_2 и вычисляя значения для x_1 и x_2, получим ФСР данной системы $\alpha_1 = (-5, 3, 1, 0)$ и $\alpha_2 = (2, -1, 0, 1)$. Тогда общее решение системы $X = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2$.

<u>*Пример 6*</u>: Сколько решений имеет система?

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} I-II \\ \\ III-I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$r(A)=3$, $n=3$. Так как ранг матрицы равен числу неизвестных, то однородная система имеет только тривиальное (нулевое) решение.

3. Контрольная работа № 3. «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии»

3.1. Теоретические вопросы

1. Линейные операции с векторами в координатной форме. Длина вектора.
2. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, их свойства.
3. Общее и каноническое уравнения прямой на плоскости.
4. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой в R^2.
5. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Расстояние от точки до плоскости в R^3.
6. Канонические уравнения прямой в R^3.
7. Взаимное расположение прямых и плоскостей в R^3. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями.
8. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

3.2. Указания к решениям задач

<u>*Пример 1*</u>: Даны векторы $\boldsymbol{a}(3,2,4)$, $\boldsymbol{b}(-1,0,3)$, $\boldsymbol{c}(5,3,1)$. Найти

а) скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

б) векторное произведение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и площадь треугольника, построенного на этих векторах;

в) смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$ и объем тетраэдра, построенного на этих векторах.

Решение:

а) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 3(-1) + 2\cdot 0 + 4\cdot 3 = 9$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|a|\cdot|b|} = \frac{9}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+0+32}} = \frac{9}{\sqrt{29}\sqrt{33}}.$$

б) Векторное произведение выражается формулой

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6i - 13j + 2k.$$

Длина (модуль) векторного произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Следовательно площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}|a\times b| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+13^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{209}.$$

в) Смешанное произведение векторов выражается формулой

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Модуль смешанного произведения $\boldsymbol{abc}$ равен объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объем тетраэдра $V_T = \frac{1}{6}V$, тогда $V_T == \frac{1}{6} \cdot 7 = \frac{7}{6}$.

<u>*Пример 2*</u>: Треугольник ABC задан своими вершинами $A(0,3)$, $B(-2,-1)$, $C(4,1)$.

а) Написать уравнения сторон (AB), (AC) и высоты (CH).

б) Найти длину высоты CH.

в) Написать уравнение медианы (CM).

г) Найти косинус угла между (CH) и (CM).

Решение:

а) Уравнение прямой, проходящей через 2 точки, имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Тогда уравнение (AB): $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-3}{-1-3}$ или $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{4}$.

Приведем к общему виду: $4x-2y+6=0$ или $2x-y+3=0$.

Аналогично, уравнение прямой (AC):

$\frac{x-0}{4-0} = \frac{y-3}{1-3}$ или $\frac{x}{4} = \frac{y-3}{-2}$, т. е. $x+2y-6=0$.

Так как CH – высота, опущенная на сторону AB, то $CH \perp AB$. Из общего уравнения прямой (AB) видим координаты ее нормального вектора $(2;-1)$. Он же будет направляющим для прямой (CH).

(CH): $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1}$, общий вид $x-2y-6=0$.

б) Длина высоты CH есть расстояние от точки C до прямой (AB). Формула $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ выражает расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax+By+C=0$. Полагая $x_0=4$, $y_0=1$, и взяв общее уравнение прямой $2x-y+3=0$, имеем: $d = \frac{|2\cdot 4-1+3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

в) Середина отрезка имеет координаты: $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$, где (x_1,y_1) и (x_2,y_2) – координаты концов отрезка AB. Тогда середина AB точка M имеет координаты $\left(\frac{0-2}{2};\frac{3-1}{2}\right)=(-1;1)$. Уравнение (CM): $\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-1}{1-1}$, $\frac{x-4}{-5}=\frac{y-1}{0}$. Из последнего уравнения заключаем, что прямая (CM) параллельна оси Ox, проходит через точку $(-1;1)$ и имеет уравнение: $y=1$.

г) Угол α между прямыми (CH) и (CM) равен углу между их направляющими векторами $\overline{CH}(2;-1)$, $\overline{CM}(-5,0)$.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CM}}{|CH|\cdot|CM|}=\frac{-10+0}{\sqrt{5}\sqrt{25}}=\frac{-10}{5\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Пример 3: Даны точки в R^3 $A(2,3,1)$, $B(-1,0,2)$, $C(4,4,1)$, $D(3,2,0)$.

а) Написать уравнение плоскости ABC, прямой (CD).

б) Найти расстояние от точки D до плоскости ABC.

в) Найти точку пересечения прямой l : $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ с плоскостью ABC.

Решение:

а) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$ имеет вид: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Тогда уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -1-2 & 0-3 & 2-1 \\ 4-2 & 4-3 & 1-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Разложив определитель по элементам 1-й строки, получим уравнение: $-x+2y+3z-7=0$.

Аналогично получим уравнение плоскости ABD:

$4x-2y+6z-8=0$ или $2x-y+3z-4=0$.

Угол α между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Нормали к плоскостям ABC и ABD: $\boldsymbol{n_1}(-1,2,3)$ и $\boldsymbol{n_2}(2,-1,3)$.

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{-2-2+9}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+1+9}}=\frac{5}{14}.$$

б) Расстояние от точки (x_0,y_0,z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ выражается формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Тогда расстояние от точки D до плоскости ABC:

$$d=\frac{|2\cdot 3-2+3\cdot 0-7|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

в) Запишем параметрические уравнения прямой l : $x=2t-1$, $y=t$, $z=-t+1$. Подставим их в уравнение плоскости ABC и найдем значение параметра t , при котором прямая и плоскость пересекаются.

$$-(2t-1)+2t+3(-t+1)-7=0,\ t=1.$$

Тогда $x=2(-1)-1=-3$, $y=-1$, $z=0$.

Точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты (–3, –1, 0).

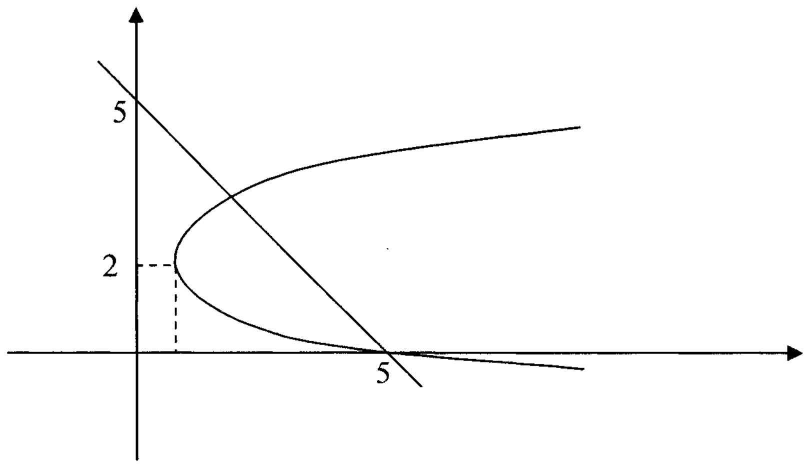
Пример 4: Определить взаимное расположение кривой $y^2-4y-x+5=0$ и прямой $x+y-5=0$ и построить их на плоскости.

Решение: Определим вид кривой, приведя ее уравнение к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат:

$$y^2-4y-x+5=(y-2)^2-4-x+5=(y-2)^2-x+1=0.$$

$$x-1=(y-2)^2.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке (1;2), ветви направлены вправо.



Решив систему уравнений $\begin{cases} y^2-4y-x+5=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$, находим точки пересечения (5;0) и (2;3).

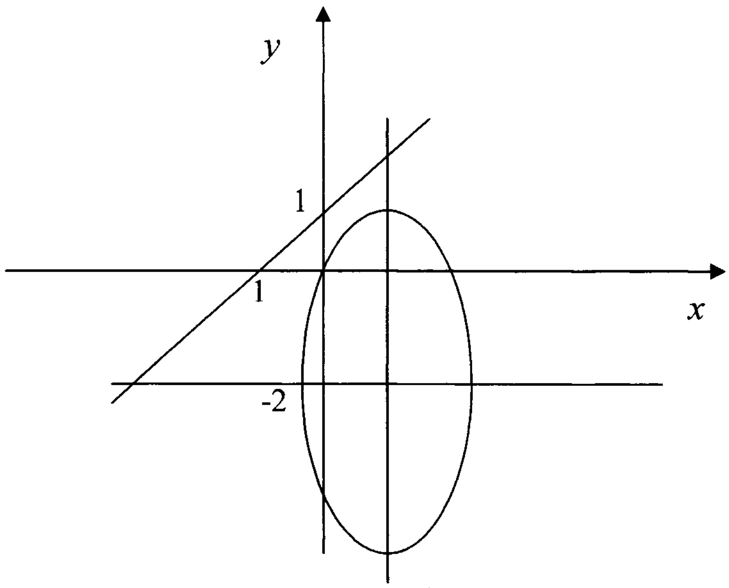
<u>*Пример 5*</u>*:* Установить вид кривой $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$ и ее взаимное расположение с прямой $y = x + 1$.

Решение: Преобразуем данное уравнение кривой

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) - 11 =$$
$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 11 =$$
$$= 9(x-1)^2 - 9 + 4(y+2)^2 - 16 - 11 = 9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 - 36 = 0$$

$9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$, т. е. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$.

Это уравнение эллипса с центром в точке $(1;-2)$, полуосями $a = 2$, $b = 3$. Оси симметрии параллельны координатным осям. Построим эллипс и прямую на плоскости. Решая систему $\begin{cases} 9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$, убеждаемся, что решений нет. Следовательно, прямая и эллипс не пересекаются.



ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

1. Вычислить определитель

1. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. С матрицами А, В, С совершить указанные действия. Найти обратную к матрице А

1. $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. 2A+5B, CA.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. 2B–A, AC

3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 3A+2B, AC^T

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. 5A+2B, CA

5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. 3A-4B, BC^T

6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4A–2B, C^TB

7. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. –5A+3B, C^TA

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 9 & -2 & 4\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 3\\ -7 & 3 & 4\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. $-6A+3B$, A^TC

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 7 & -2 & 3\\ 8 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 3\\ -7 & 3 & 4\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. $-5A+B$, B^TC

10. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ 3 & -2 & 2\\ 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 7 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$. $3A+2B$, A^TC^T

11. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -3\\ 1 & -2 & 3\\ 9 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 7\\ 4 & -5 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$. $-5A+6B$ B^TC^T

12. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 1 & 7 & 3\\ 6 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 5\\ 8 & -2 & 7\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 4 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. $5A-4B$, C^TB

13. $A=\begin{pmatrix}6 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 7 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -3 & 4\\ 3 & 7 & 0\end{pmatrix}$. $3A+4B$, AC^T

14. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 5\\ 8 & -2 & 7\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. $-2A+3B$, B^TC

15. $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\ 7 & -2 & 7\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 6 & -4\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$. $4A-7B$, CB

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & 6 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$. $2A-3B$, A^TC

17. $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 8 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$. $-3A+5B$, CA

18. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\ 4 & 2 & 3\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -6 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 7\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. $5A+3B$, C^TB

19. $A=\begin{pmatrix}9 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 8 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix}$. $-4A+5B$, CB

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 3\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. $7A-8B$, C^TA.

3. Найти ранг матрицы

1. $\begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 1 & -2\\ 3 & -7 & -1 & 7 & -2\\ 3 & -1 & 3 & -5 & -2\\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}6 & 5 & 7 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 1 & -2\\ 5 & -3 & 1 & 7 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -4 & 2\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}5 & -3 & 3 & 2 & 1\\ 3 & -4 & 1 & 4 & 3\\ -2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -4 & 2\\ 4 & -5 & -2 & -1 & -5\\ -2 & 5 & -2 & -7 & 9\\ -5 & 5 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}9 & 7 & 8 & 6 & 4\\ -3 & -9 & -6 & 0 & 0\\ 0 & -10 & -5 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}2 & 4 & 2 & 0 & 4\\ -1 & 0 & 0 & -3 & -4\\ 4 & -7 & -1 & 10 & 2\\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 5 & 3 & 0\\ -4 & 5 & 1 & 6 & 1\\ -4 & 5 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}3 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 4 & -1 & 3 & -2 & 2\\ 6 & 1 & 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 & 8 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & -14 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0 \\ -5 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ -6 & 5 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & -7 & 9 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & 14 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 9 & -6 \\ 4 & 0 & -11 & -1 & -4 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 3 & -8 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & -8 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ -13 & 2 & -9 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & -9 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Решить системы линейных уравнений: а) методом Крамера; б) методом Гаусса

1.а) $\begin{cases} 6x-y+4z=19 \\ 3y+2z=3 \\ 3x+8y-2z=-11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+z-t=10 \\ 3x-2y+6z+3t=4 \\ 4x+y+3z+4t=20 \\ -2x-3y+z+2t=-16 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 2x+5y-z=19 \\ 4x+7y+8z=56 \\ x-7z=-20 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+5z-3t=14 \\ 2x+3y-z+3t=10 \\ 3x+5y-2z+7t=14 \\ -x+2y+5z+2t=2 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} 5x+4y-z=8 \\ 2x+7y+2z=-11 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+4z+t=9 \\ 3x-5y-z+3t=-12 \\ 2x-3y-2z+5t=-18 \\ -4x+2y+z+2t=3 \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x+7y-z=14 \\ 3x+2y+4z=16 \\ x+5z=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+6z+t=-5 \\ 2x+2y-z+3t=4 \\ 3x-3y-z+5t=-2 \\ -2x+2y+z+2t=-15 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 5x+y-z=-21 \\ x-8y+7z=18 \\ x+3y=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-4y+4z+t=21 \\ 2x-3y-z+3t=15 \\ 3x\ \_\ 2y+2z+5t=33 \\ -2x+3y+z+2t=10 \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 4x+y-z=9 \\ -3x+5y+2z=-17 \\ x+3y=-3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3z+t=15 \\ 2x-4y+4z+3t=29 \\ 3x-2y+2z+5t=33 \\ -2x+3y+z+2t=-3 \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} 7x+y-z=-5 \\ 3x+5y+4z=16 \\ x+3y=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3z+t=-1 \\ 2x-4y+4z+3t=-7 \\ 5x-6y+2z+3t=-17 \\ -2x+3y+z+2t=9 \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 9x-2y+4z=5 \\ 6x+3y=18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3z+t=10 \\ 2x-4y+7z+3t=21 \\ 3x-6y+2z+3t=16 \\ -2x+3y+z+2t=-10 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} x+3y-z=6 \\ 7x-2y+3z=-17 \\ 8x+3y=-7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z+t=-8 \\ 2x-2y+5z+3t=-8 \\ 3x-5y+2z+3t=-18 \\ -2x+3y+z+2t=12 \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} 2y+5z=-8 \\ 3x-2y+2z=9 \\ 5x-3y=22 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z+t=-5 \\ 2x-2y+3z+3t=-2 \\ 4x-5y+2z+3t=-7 \\ -2x+3y+z+2t=7 \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} 5x-y-3z=-1 \\ x-2y+3z=7 \\ 9x-3y=18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z+t=-6 \\ x-4y+3z+3t=-8 \\ -4x-5y+3z+3t=-1 \\ 2x+3y+z+2t=10 \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} 2x-y-4z=-9 \\ x+7y+3z=-7 \\ 6x+2y=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+z-t=3 \\ x+7y+3z+t=19 \\ -4x-y+3z+3t=11 \\ -2x-3y+z+2t=0 \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} 6x-z=15 \\ x+2y+3z=-9 \\ -4x+2y+5z=-25 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+4z+t=-27 \\ 2x+y-z+3t=12 \\ 3x-3y+2z+5t=-11 \\ -2x+3y+z+2t=-8 \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} 5x-y=13 \\ x+2y+4z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+z-t=-6 \\ 3x+7y+3z+t=-6 \\ 4x+y+3z+3t=13 \\ -2x=3y+z+2t=3 \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} 4x-y=-13 \\ -x+2y+4z=6 \\ 4x+2y+7z=-8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+z-t=-6 \\ 3x-2y+3z+6t=-24 \\ 6x+y+3z+4t=-30 \\ -2x-3y+z+2t=0 \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} 3x+y+z=-1 \\ -3x+3y-z=17 \\ 3x-5y-z=17 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-4y-3z+2t=1 \\ -7x+4y+7z+2t=20 \\ 4x+4y+5z+3t=-64 \\ -8x-3y+9z+7t=13 \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} 7x-y+4x=11 \\ x+2y+2z=13 \\ x+8y-2z=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+z-t=-3 \\ 3x+7y+4z+3t=-4 \\ 4x+9y+3z+3t=-9 \\ -2x-3y+z+2t=9 \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} x-y+6z=7 \\ 4x+2y+3z=-8 \\ 3x+5y-2z=-11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+z-t=-3 \\ 2x+5y+4z+3t=0 \\ 5x+9y+3z+4t=-7 \\ 3x+4y+z+2t=-2 \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} 9x+z=6 \\ 5x-2y+3z=-8 \\ 3x+y-2z=11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+z-t=-6 \\ 3x+5y+4z+3t=-9 \\ -5z-9y+3z-8t=14 \\ 2x+4y+z+2t=-8 \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} x+8y+3z=0 \\ 2x+5y=-1 \\ 3x+y-2z=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+z-t=-4 \\ 3x+5y+4z+3t=-4 \\ 4x+6y+3z-8t=-16 \\ 2x+4y+z+2t=-4 \end{cases}$

2. Исследовать системы на совместность. Для совместных систем найти решение

1. а) $\begin{cases} x+2y-3z+t=5 \\ 2x+5y-2z+4t=-1 \\ 3x+8y-z+5t=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+6x_2+3x_3=0 \\ 6x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 3x_1-x_2+4x_3=0 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} -x+3y+4z+7t=2 \\ x+y+6z+t=-14 \\ -x+5y+9z+11t=-4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2+4x_3=0 \\ x_1-2x_2+5x_3=0 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x+7y+3z-t=2 \\ 2x+9y+6z-4t=-3 \\ x+2y+3z-3t=-5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=0 \\ -x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+x_2+7x_3=0 \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} 3x - y + z - 4t = 3 \\ 2x - 3y + 2z - 4t = 5 \\ x - 5y + 3z - 4t = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z + 3t = 2 \\ x + 3y + 4z + t = 3 \\ 5x + 4y + 16z + 6t = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 6t = 8 \\ 7x - 5y + 4z + 9t = 15 \\ x - 2y + z = -6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} x + 2y - z - 3t = -7 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \\ 8x + y + 2z + 3t = 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x + y + 4z + 3t = 1 \\ x + 3y + 4z + 7t = 6 \\ x + y + 3z + t = -4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 5x + 3y + 3z + t = 0 \\ 2x - 2y + z + 3t = 5 \\ x + 7y + z - 5t = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} x + 3y + 4z + t = 3 \\ 2x - y + z + 3t = 7 \\ 3x - 5y - 2z + 5t = 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} 1x + 3y + 4z + t = 3 \\ 2x - y + z + 3t = 7 \\ 3x + 2y + 4z + 5t = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z + 3t = 2 \\ 3x - 3y + 2z + 3t = 1 \\ -x + 7y - 6z - 3t = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ -4x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} 3x+2y+5z+4t=10 \\ x+3y+3z+1=0 \\ 2x-7y+2z+3t=10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+5x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+x_3=0 \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} 5x-4y+4z+3t=2 \\ x+6y-4z-3t=-2 \\ -x+11y-8z-6t=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+5x_2-2x_3-x_4=0 \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} 3x-3y+4z+3t=7 \\ 6x-6y+3z+6t=-1 \\ -3x+3y-z-3t=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} x+3y+3z+t=0 \\ 4x+4y+5z+t=6 \\ -2x+2y+4z+t=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 4x_1-3x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+6x_3=0 \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} 6x-2y+3z+3t=4 \\ 3x-7y+4z+6t=2 \\ 3x-3y+3z+3t=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-4x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} 5x+3y+10z+5t=1 \\ 5x-3y+5z+5t=3 \\ x-3y-z+t=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} 3x-y+z-4t=3 \\ 2x-3y+2z-4t=5 \\ x-5y+3z-4t=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3-3x_4=0 \\ -x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} x+7y+3z-t=2 \\ 2x+9y+6z-4t=-3 \\ x+2y+3z-3t=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ -x_1+4x_2-6x_3=0 \\ x_1+6x_2-14x_3=0 \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

1. Даны векторы *a,b,c.* Найти:

а) длины этих векторов;

б) скалярное произведение векторов *a* и *b* и косинус угла между ними;

в) векторное произведение *a*×*b* и площадь треугольника, построенного на этих векторах;

г) смешанное произведение *abc* и объём тетраэдра, построенного на этих векторах.

1. ***a*(3,4,1), *b*(4,–1, 3), *c*(1,4,–5)**
2. ***a*(5,–1,0), *b*(1,2,4), *c*(3,2,1)**
3. ***a*(–4,2,5), *b*(6,0,–1), *c*(3,2,1)**
4. ***a*(7,3,1), *b* (1,5,3), *c*(–1,4,0)**
5. ***a* (7,2,1), *b*(4,–2), *c*(1,3,0)**
6. ***a*(8,5,6), *b*(–1, 2, –2), *c*(4,7,0)**
7. ***a*(5,3,–2), *b*(3,2,4), *c*(1,0,5)**
8. ***a*(–7,2,6), *b*(2,4,1), *c*(1,4,8)**
9. ***a*(2,5,–1), *b*(4,7,8), *c*(1,0,3)**
10. ***a*(6,–1,4), *b*(0,3,2), *c*(3,8,–2)**
11. ***a*(2,5,–1), *b*(7,4,3), *c*(1,0,–3)**
12. ***a*(–4,2,8), *b*(1,2,3), *c*(5,0,1)**
13. ***a*(1,3.–1), *b*(6,–2,4), *c*(5,–2,0)**
14. ***a*(5,–5,1), *b*(–2,2,6), *c*(7,3,0)**
15. ***a*(1,1,–1), *b*(9,–2,4), *c*(6,3,0)**
16. ***a*(7,3,1), *b*(3,5,4), *c*(1,3,0)**
17. ***a*(1,4,0), *b*(7,3,1), *c*(1,5,3)**
18. ***a*(1,5,6), *b*(2,2,0), *c*(–5,1,3)**
19. ***a*(7,6,0), *b*(1,3,5), *c*(1,–2,4)**
20. ***a*(5,7,8) ,*b*(–3,2,1), *c*(2,5,9)**

2. Дан треугольник с вершинами в точках A,B,C. Требуется:

а) написать уравнения сторон (AB), (AC), высоты (CH), медианы (CM). Построить эти прямые;

б) найти длину высоты CH;

в) найти косинус угла между прямыми (CH) и (CM);

1. A(1,1), B(9,1), C(3,6)
2. A(3,3), B(0,–6) C(4,–4)
3. A(–3,4), B(5,–2), C(–1,–4)
4. A(–3,–5), B(5,2), C(0,3)
11. A(8,5) , B(4,–3), C(3,4)
12. A(3,–6), B(7,2), C(1.0)
13. A(–5,3), B(7,6) C(3,4)
14. A(7,1), B(–5,1), C(4,4)

5. A(6,1), B(–2,–3), C(1,3)

6. A(–2,–6), B(–4,–2), C(1,0)

7. A(–3,3), B(–2,–5), C(2,–3)

8. A(–3,4), B(7,4), C(5,–2)

9. A(–3,1), B(7,2), C(7,–3)

10. A(–5,6), B(–3,–2), C(2,5)

15. A(0,6), B(6,1), C(4,8)

16. A(–4,5), B(–2,–3), C(1,1)

17. A(–1,2), B(8,0), C(6,4)

18. A(–4,3), B(7,0), C(3,2)

19. A(–5,–3), B(0,4), C(1,–1)

20. A(–2,6), B(4,–3), C(5,1)

3. Даны точки A, B, C, D. Требуется:
а) написать уравнения прямой (CD), плоскости ABC;
б) найти расстояние от точки D до плоскости ABC;
в) найти точку пересечения прямой *l* с плоскостью ABC

1. A(1,2,3), B(0,7,0), C(3,1,3), D(5,6,–2), l: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z=1}{4}$

2. A(1,2,–3), B(0,–5,2), C(5,0,5), D(1,2,7) l: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$

3. A(0,–1,3), B(1,–3,2), C(–1,–6,1) D(2,7,5), l: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-2}{0}$

4. A(2,0,1), B(0,4,1), C(3,2,–1), D(7,8,5), l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$

5. A(–1,0,1), B(5,–3,0), C(4,5,1), D(6,–1,2), l: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{0}$

6. A(–1,–1,1), B(0,3,0), C(5,3,1), D(2,6,5), l: $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$

7. A(0,1,–3), B(–4,4,–1), C(1,4,–2), D(2,–5,6), l: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$

8. A(1,2,1), B(0,2,5) C(–1,3,1), D(1,4,3), l: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{1}$

9. A(2,3,2), B(1,3,6), C(0,4,2), ,D(2,5,4), l: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{-1}$

10. A(2,0,3), B(1,–1,6), C(0,0,2), D(2,1,4), l: $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{2}$

11. A(4,5,1), B(3,0,2), C(1,2,-1), D(4,–4,1) l: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{1}$

12. A(-1,2,1), B(0,-1,6), C(-1,0,2,), D(1,1,4), l: $\frac{x+3}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{-2}$

13. A(0,5,4), B(–2,4,2), C(–1,3,6), D(0,3,2), l: $\frac{x+5}{-2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{3}$

14. A(–1,4,3), B(–2,2,5), C(–3,3,1), D(–1,4,3), l: $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+4}{1}$

15. A(–4,2,–1), B(–2,1,1), C(–3,1,3), D(–2,3,1), l: $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-1}$

16. A(–1,2,0), B(–2,2,4), C(–3,3,1), D(–1,4,2), l: $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{2}$

17. A(3,2,4), B(1,1,2), C(2,0,6), D(3,0,2), l: $\frac{x-4}{6}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{-1}$

18. A(–1,2,4), B(4,3,1), C(0,–2,3), D(5,–2,1), l: $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{4}$

19. A(–2,3,7), B(0,4,–2), C(5,–1,0), D(0,2,–1), l: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{-3}$

20. A(–1,–2,1), B(4,4,1), C(3,7,9), D(0,2,6), l: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{0}$

4. Определить взаимное расположение кривой второго порядка *f(x,y)* и прямой *Ax+By+C = 0,* построить их на плоскости.

1. $x^2+4y^2-12x-6y+36=0$, $x+2y-6=0$
2. $x^2+8x-4y^2+32y-52=0$, $x+1=0$
3. $y^2-4y-x+5=0$, $x+y=5$
4. $4x^2-48x+y^2-4y+132=0$, $3x+2y=16$
5. $x^2+8x-4y^2+32y-44=0$, $x-4y+2=0$
6. $y^2-4y-4x+8=0$, $x+y=1$
7. $4x^2+y^2+8x+12=0$, $x+y=2$
8. $x^2-6x-y+8=0$, $x+y-2=0$
9. $9x^2-y^2-8y-25=0$, $3x+y=0$
10. $x^2+y^2+8y+7=0$, $x+y-2=0$
11. $y^2+2y-x-1=0$, $x-y-1=0$
12. $4x^2+40x+25y^2=0$, $2x-5y=0$
13. $x^2+4x+4y-8=0$, $x+y-3=0$
14. $4x^2-16x-y^2-4y+8=0$, $2x+y-4=0$
15. $y^2-2y+x+3=0$, $x+y-2=0$
16. $9x^2-54x+y^2-2y+72=0$, $y+2=0$
17. $4x^2-16x-y^2-4y+16=0$, $y+x=0$
18. $x^2-6x+y^2+4y+9=0$, $x+y-3=0$
19. $y^2-4y+x+2=0$, $x-2y+1=0$
20. $4x^2-24x-y^2-2y+31=0$, $x-y-3=0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 303 с.

2. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. - М; СПб.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 384 с.

3. Фаддеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. - СПб.: Лань, 1998. - 288 с.

4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. - СПб.: Профессия, 2002. - 199 с.

5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - М.: Высшая школа, 1999. - 304 с.